



ReDSCFI™

المركز الإقليمي لتطوير البرمجيات التعليمية



وزارة التربية  
التوجيه الفني العام للرياضيات



دولة الكويت  
وزارة التربية

# الإدارة العامة لمنطقة الجبراء التعليمية

## مدرسة عروة بن الزبير الثانوية بنين

### قسم الرياضيات

### أوراق عمل للصف العاشر

#### الوحدة السابعة : المصفوفات

- ١-٧ • تنظيم البيانات في مصفوفات
- ٢-٧ • جمع و طرح المصفوفات
- ٣-٧ • ضرب المصفوفات
- ٤-٧ • مصفوفات الوحدة و النظير الضربي
- ٥-٧ • حل نظام من معادلتين خطيتين

اعداد : أ. همام جبر الفخواله

**تعريف :** المصفوفة هي تنظيم من الأعداد المرتبة في صفوف وأعمدة ويرمز لها بأحد أحرف الهجاء و نضع تحته خطأ.

**رتبة المصفوفة :** إذا كان عدد الصفوف ( م ) وعدد الأعمدة ( ن ) فرتبة المصفوفة تكتب م × ن حيث نكتب عدد الصفوف أولاً ثم يليه عدد الأعمدة .

الأعداد المكونة للمصفوفة تسمى عناصر . يحدد أي عنصر في المصفوفة بدلالة رقمي الصف و العمود الواقع فيهما .

**المصفوفة المربعة :** هي مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة . فيما عدا ذلك تسمى مصفوفة مستطيلة .

**المصفوفة الأفقية :** هي مصفوفة مكونة من صف واحد .

**المصفوفة العمودية :** هي مصفوفة مكونة من عمود واحد .

**المصفوفات المتساوية :** تكون مصفوفتان متساويتان إذا كانت لهما الرتبة نفسها وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية و العكس صحيح .

مثال (١) :

إذا كانت : 
$$\begin{bmatrix} 4 & 25 \\ 18 + ص & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 - 2س \\ 12 + 3ص & 3 \end{bmatrix}$$
 فأوجد قيمة كل من س ، ص

## العمليات على المصفوفات

## الجمع و الطرح و الضرب القياسي و ضرب المصفوفات

أولاً : الجمع و الطرح : لجمع مصفوفتين يجب أن تكونا من الرتبة نفسها .

و نجمع كل عنصرين لهما الموقع نفسه في المصفوفتين . مصفوفة الجمع لها رتبة كل من المصفوفتين .

مثال (٢) : إذا كانت  $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ & ٩ \end{bmatrix}$  ،  $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ & ٩ \end{bmatrix}$  ،

فأوجد إن أمكن : (أ)  $\underline{أ} + \underline{ب}$  (ب)  $\underline{أ} - \underline{ب}$

تطبيق : أوجد ناتج ما يلي :

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٧ \\ ٢ & ٣ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٦ & ٣ \\ ٧ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٤ & ٢ \\ ٧ & ٦ \end{bmatrix}$$

ضرب مصفوفة في عدد :

الضرب القياسي هو عملية ضرب مصفوفة  $A$  في عدد حقيقي  $k$  :  $k \neq 0$

النتيجة هي المصفوفة  $kA$

نحصل على المصفوفة  $kA$  بضرب كل عنصر من  $A$  في  $k$

إذا كان  $k = 0$  نحصل على المصفوفة الصفرية .

مثال (٣) : إذا كانت :  $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$  ،  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  ،

فأوجد :  $5A - 3B$  ،  $2A + B$

## حل المعادلات المصفوفية

المعادلة المصفوفية: هي معادلة إحدى مصفوفاتها غير معلومة ( المتغير )

مثال (٤) : حل المعادلة المصفوفية التالية :

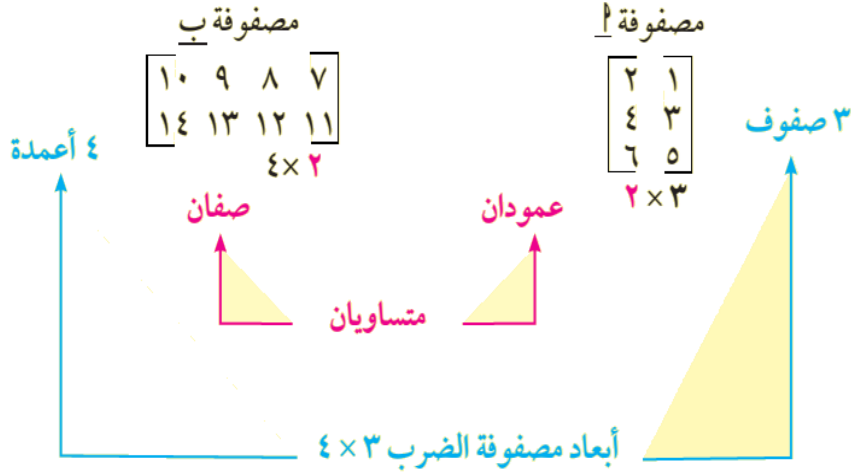
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \underline{\underline{x}}$$

مثال (٥) : حل المعادلة :  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \underline{\underline{x}}$

## ضرب المصفوفات

## ضرب المصفوفات :

المصفوفة  $A$  هي مصفوفة من الرتبة  $m \times n$  والمصفوفة  $B$  هي مصفوفة من الرتبة  $n \times r$ ، عندئذٍ مصفوفة الضرب  $A \times B$  هي مصفوفة من الرتبة  $m \times r$ .



تكون مصفوفة الضرب معرفة إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مساوياً لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

$$A_{m \times n} \times B_{n \times r} = C_{m \times r}$$

مثال (٦) : أوجد ناتج  $A \times B$  حيث :  $A = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$  ،  $B = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$

مثال (٧): إذا كانت  $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$  أوجد  $\underline{ب}^٢$  ،  $\underline{ب}^٣$

### مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات)

مصفوفة الوحدة: هي مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسي ١ وبقية العناصر صفر ويرمز لها  $\underline{و}$

النظير الضربي: إذا كانت  $\underline{ب}$  ،  $\underline{ج}$  مصفوفتين مربعيتين من الرتبة نفسها بحيث يكون  $\underline{ب} \times \underline{ج} = \underline{و}$  و

فإن  $\underline{ج}$  هي النظير الضربي للمصفوفة  $\underline{ب}$  ويرمز لها  $\underline{ب}^{-١}$

مثال (٨): أثبت أن  $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$  هي النظير الضربي للمصفوفة  $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$

محدد مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية :

محدد المصفوفة المربعة  $\begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{bmatrix}$  هو  $\text{أد} - \text{بج}$

نكتب  $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{vmatrix} = \text{أد} - \text{بج}$

مثال (٩) : أوجد محدد كل من المصفوفات التالية :

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} = \underline{\text{ب}} \quad , \quad \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \underline{\text{أ}}$$

تسمى المصفوفة التي محدها يساوي الصفر بالمصفوفة المنفردة .

مثال (١٠) : إذا كانت المصفوفة  $\begin{bmatrix} ٤ & \text{س} \\ ٦ & ١٢ \end{bmatrix} = \underline{\text{أ}}$  منفردة أوجد قيمة س



## خاصية

بفرض أن:  $P = \begin{bmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{bmatrix}$  إذا كان  $أد - ب ج \neq ٠$ ، فإن لها نظير ضربى  $P^{-١}$  حيث:

$$P^{-١} = \frac{١}{|P|} \begin{bmatrix} د & -ب \\ -ج & أ \end{bmatrix}$$

$$P^{-١} = \frac{١}{أد - ب ج} \begin{bmatrix} د & -ب \\ -ج & أ \end{bmatrix}$$

مثال (١١): هل للمصفوفة:  $P = \begin{bmatrix} ١ & -٨ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$  نظير (معكوس) ضربى؟ في حالة الإيجاب أوجده

مثال (١٢) : حل المعادلة :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\text{س}} \times \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

تطبيق : حل المعادلة :

$$\begin{bmatrix} 16 & 31 \\ 12 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \times \underline{\text{س}}$$

## حل نظام من معادلتين خطيتين

أولاً : الحل باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة المربعة :

مثال (١٣) : حل النظام : 
$$\begin{cases} ٧ = س - ص \\ ٣ = س + ص \end{cases}$$
 باستخدام النظير الضربي للمصفوفة .

ثانياً : الحل باستخدام قاعدة كرامر(المحددات) لحل معادلتين خطيتين :

$$\text{مثال (١٤) : حل النظام : } \left. \begin{array}{l} ٧ = ٣ص + ٥س \\ ٥ = ٣ص + ٢س \end{array} \right\} \text{ باستخدام قاعدة كرامر.}$$

مثال (١٥) : حل النظام : 
$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ -4x - 3y = 7 \end{cases}$$
 باستخدام قاعدة كرامر .

واجب : حل المعادلتا المصفوفية إن أمكن :

$$\begin{bmatrix} ٨ \\ ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

## أسئلة الامتحانات السابقة ( المصفوفات )

الدور الثاني ٢٠١٧/٢٠١٦

س١ ( استخدم قاعدة كرامر لحل النظام :

$$\left. \begin{array}{l} ٤س - ٥ص = ٧ \\ ٣ص - ٦س = ٣ \end{array} \right\}$$



س٢ ( أوجد س بحيث :

الفترة الثانية ٢٠١٧/٢٠١٦

$$\begin{bmatrix} ٥ \\ ١٠ \end{bmatrix} = \underline{س} \times \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$



الفترة الرابعة ٢٠١٦/٢٠١٥

س٣ ( استخدم قاعدة كرامر لحل النظام :

$$\left. \begin{array}{l} ٣س + ٢ص = ٦ \\ -٤س - ٣ص = ٧ \end{array} \right\}$$



الفترة الثالثة ٢٠١٦/٢٠١٥

س٤ ( استخدم قاعدة كرامر لحل النظام :

$$\left. \begin{array}{l} ٢س + ٤ص = ٤ \\ ٣ص + ٧س = ٧ \end{array} \right\}$$



الفترة الثالثة ٢٠١٦/٢٠١٥

س٥ ( إذا كانت :  $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} = \underline{پ}$  ،  $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = \underline{ب}$  ،

فأوجد : ☆ النظير الضربي لـ  $\underline{پ}$  ☆  $\underline{پ} + ٣\underline{ب}$



الدور الثاني ٢٠١٥/٢٠١٤

س٦ ( استخدم قاعدة كرامر لحل النظام :

$$\left. \begin{array}{l} ٧ = ٣س + ٧ص \\ ١ = ٣ص - ٧س \end{array} \right\}$$



س٧) استخدم النظير الضربي للمصفوفة لحل النظام :  $\begin{cases} 5 = 3ص + س \\ 6 = 4ص + س \end{cases}$  الفترة الرابعة ٢٠١٥/٢٠١٤



س٨) اكتب نظام المعادلات :  $\begin{cases} 7 = 3ص + 5س \\ 5 = 2ص + 3س \end{cases}$  الفترة الرابعة ٢٠١٤/٢٠١٣

على صورة المعادلة المصفوفية  $ع \times ب = ح$  حيث  $ب$  هي مصفوفة المعاملات ،  $ع$  هي مصفوفة المتغيرات  $ب$  هي مصفوفة الثوابت . ثم حل نظام المعادلات ( باستخدام النظير الضربي أو باستخدام المحددات )



س٩) استخدم قاعدة كرامر لحل النظام :  $\begin{cases} 4 = 2ص + س \\ 7 = 3ص + س \end{cases}$  الفترة الرابعة ٢٠١٣/٢٠١٢



س١٠) أوجد النظير الضربي للمصفوفة :  $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = ب$  الفترة الرابعة ٢٠١٣/٢٠١٢



س١١) إذا كانت :  $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = ب$  ،  $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = ب$  الفترة الثالثة ٢٠١٣/٢٠١٢

أثبت أن  $ب$  هي النظير الضربي لـ  $ب$



س١٢) استخدم قاعدة كرامر لحل النظام :  $\begin{cases} 6 = 2ص + 3س \\ 7 = 3ص - 4س \end{cases}$  الفترة الثالثة ٢٠١٣/٢٠١٢



انتهت الوحدة السابعة

ودعه خير الضواحيه  
M.J.K

